Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3 8 de julho de 2019

Exame da Época de Recurso Duração: 2h30

Justifique devidamente as suas respostas. **O formulário encontra-se no verso.**

---

1. [**50**] Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n} x^n$.
   (a) Determine o domínio de convergência da série.
   (b) Justifique que
   $$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{para todo o } x \in]-1,1[.$$
   [Sugestão: use convenientemente um dos desenvolvimentos indicados no formulário]
   (c) Usando a representação indicada da alínea (b), determine a soma $f(x)$ da série dada (no respetivo intervalo de convergência).

2. [**10**] Determine a série de Fourier de co-senos da função f definida em $[0,\pi]$ por
   $$f(x) = \begin{cases} 1\,, & se \quad 0 \le x \le 1, \\ 0\,, & se \quad 1 < x \le \pi. \end{cases}$$

3. [**30**] Considere a função g definida por $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{y}$.
   (a) Determine o domínio de g e represente-o geometricamente.
   (b) Mostre que g possui um mínimo local no ponto $(1,1)$.

4. [**30**] Calcule os extremos absolutos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y + x^2$, no conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

5. [**40**] Resolva as seguintes equações diferenciais:
   (a) $y' = e^{x-2y}$; (b) $y''' + y' = 4x$.

6. [**25**] Resolva o seguinte problema de valores iniciais, usando transformadas de Laplace:
   $$y'' - y' = 2e^t \cos t, \quad y(0) = 0 = y'(0).$$

7. [**15**] Considere uma equação diferencial da forma
   $$y' + a(x)y + b(x) = c(x)\,y^2\,, \tag{1}$$
   onde $a(x), b(x), c(x)$ são funções contínuas num dado intervalo de $\mathbb{R}$.
   Mostre que se y_p é uma solução particular da equação (1), então a substituição
   $$y = y_p + \frac{1}{z} \qquad [z = z(x)]$$
   transforma a equação dada numa equação diferencial linear (em z e x), nomeadamente
   $$z' + (2c(x)\,y_p(x) - a(x))\,z = -c(x).$$

Algumas fórmulas de derivação

$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\, a^f\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f' \cos f$	$(\cos f)' = -f' \operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f' \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen}\, f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos\, f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg}\, f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg}\, f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[$
- $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a \rvert$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a \rvert$

função	transformada
$e^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \quad (a > 0)$	$e^{-as} F(s)$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$